अध्याय 7

त्रिभुज

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

त्रिभुज और उसके भाग, त्रिभुजों की सर्वांगसमता, सर्वांगसमता और शीर्षों की संगतता, त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कसौटियाँ (नियम) : (i) SAS (ii) ASA (iii) SSS (iv) RHS

ASA कसौटी की एक विशिष्ट स्थिति के रूप में AAS कसौटी।

- एक त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
- एक त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।
- दो दिए हुए बिंदु से समदूरस्थ एक बिंदु उन बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड के लंब समद्विभाजक पर स्थित होता है।
- दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से समदूरस्थ एक बिंदु उन रेखाओं से बने कोणों के समद्विभाजकों पर स्थित होता है।
- किसी त्रिभुज में,
  (i) बड़े कोण की सम्मुख भुजा लंबी होती है।
  (ii) लंबी भुजा का सम्मुख कोण बड़ा होता है।
  (iii) किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ है तथा ΔABC, ΔRPQ के सर्वांगसम नहीं है, तो निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य नहीं है?

(A) BC = PQ (B) AC = PR (C) QR = BC (D) AB = PQ

हल : उत्तर (A)

प्रश्नावली 7.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में, सही उत्तर लिखिए –

1. निम्नलिखित में से कौन त्रिभुजों की सर्वांगसमता की एक कसौटी नहीं है?

(A) SAS (B) ASA (C) SSA (D) SSS

2. यदि AB = QR, BC = PR और CA = PQ है, तो

(A) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (B) $\Delta CBA \cong \Delta PRQ$

(C) $\Delta BAC \cong \Delta RPQ$ (D) $\Delta PQR \cong \Delta BCA$

3. ΔABC में, AB = AC और $\angle B = 50°$ है, तब $\angle C$ बराबर है

(A) 40° (B) 50° (C) 80° (D) 130°

4. ΔABC में, BC = AB और $\angle B = 80°$ है, तब $\angle A$ बराबर है

(A) 80° (B) 40° (C) 50° (D) 100°

5. ΔPQR में, $\angle R = \angle P$ तथा QR = 4 cm और PR = 5 cm है, तब PQ की लम्बाई है

(A) 4 cm (B) 5 cm (C) 2 cm (D) 2.5 cm

6. D एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु इस प्रकार स्थित है कि AD कोण BAC को समद्विभाजित करता है। तब,

(A) BD = CD (B) BA > BD (C) BD > BA (D) CD > CA

7. यह दिया है कि $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ है तथा AB = 5 cm, $\angle B = 40°$ और $\angle A = 80°$ है। तब निम्नलिखित में से कौन सत्य है?

(A) DF = 5 cm, $\angle F = 60°$ (B) DF = 5 cm, $\angle E = 60°$

(C) DE = 5 cm, $\angle E = 60°$ (D) DE = 5 cm, $\angle D = 40°$

8. एक त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाइयाँ 5 cm और 1.5 cm हैं। इस त्रिभुज की तीसरी भुजा की लंबाई निम्नलिखित नहीं हो सकती

(A) 3.6 cm (B) 4.1 cm (C) 3.8 cm (D) 3.4 cm

9. ΔPQR में, यदि $\angle R > \angle Q$ है, तो

(A) QR > PR (B) PQ > PR (C) PQ < PR (D) QR < PR

10. त्रिभुजों ABC और PQR में, AB = AC, $\angle C = \angle P$ और $\angle B = \angle Q$ है। ये दोनों त्रिभुज हैं

(A) समद्विबाहु परंतु सर्वांगसम नहीं (B) समद्विबाहु और सर्वांगसम

(C) सर्वांगसम परंतु समद्विबाहु नहीं (D) न तो सर्वांगसम और न ही समद्विबाहु

11. त्रिभुजों ABC और DEF में, AB = FD तथा $\angle A = \angle D$ है। दोनों त्रिभुज SAS अभिगृहीत से सर्वांगसम होंगे, यदि

(A) BC = EF (B) AC = DE (C) AC = EF (D) BC = DE

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : दो त्रिभुजों ABC और DEF में, AB = DE और AC = EF है। दोनों त्रिभुजों में से दो कोणों के नाम बताइए जो बराबर होने चाहिए, ताकि ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हों। अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल : वाँछित दोनों कोण $\angle A$ और $\angle E$ हैं। जब $\angle A = \angle E$ है, तो SAS कसौटी से $\Delta ABC \cong \Delta EDF$ है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : त्रिभुजों ABC और DEF में, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और AB = EF है। क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल : दोनों त्रिभुजों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है क्योंकि AB और EF दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाएँ नहीं हैं।

प्रश्नावली 7.2

1. त्रिभुजों ABC और PQR में, $\angle A = \angle Q$ और $\angle B = \angle R$ है। Δ PQR की कौन सी भुजा Δ ABC की भुजा AB के बराबर होनी चाहिए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हों? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
2. त्रिभुजों ABC और PQR में, $\angle A = \angle Q$ और $\angle B = \angle R$ है। Δ PQR की कौन-सी भुजा Δ ABC की भुजा BC के बराबर होनी चाहिए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हों? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
3. "यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और एक कोण के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज अवश्य ही सर्वांगसम होने चाहिए।" क्या यह कथन सत्य है? क्यों?
4. "यदि किसी त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज अवश्य ही सर्वांगसम होने चाहिए।" क्या यह कथन सत्य है? क्यों?
5. क्या भुजाओं की लंबाइयाँ 4 cm, 3 cm और 7 cm लेकर किसी त्रिभुज की रचना की जा सकती है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
6. $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ दिया हुआ है। क्या यह कहना सत्य है कि BC = QR है? क्यों?
7. यदि $\Delta PQR \cong \Delta EDF$ है, तो क्या यह कहना सत्य है कि PR = EF है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
8. Δ PQR में, $\angle P = 70°$ और $\angle R = 30°$ है। इस त्रिभुज की कौन-सी भुजा सबसे लंबी है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
9. AD किसी त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है। क्या यह कहना सत्य है कि AB + BC + CA > 2 AD है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
10. M किसी त्रिभुज ABC की भुजा BC पर स्थित एक बिंदु ऐसा है कि AM कोण BAC का समद्विभाजक है। क्या यह कहना सत्य है कि त्रिभुज का परिमाप 2 AM से अधिक है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

11. क्या भुजाओं की लंबाइयाँ 9 cm, 7 cm और 17 cm लेकर किसी त्रिभुज की रचना की जा सकती है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

12. क्या भुजाओं की लंबाइयाँ 8 cm, 7 cm और 4 cm लेकर किसी त्रिभुज की रचना की जा सकती है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : आकृति 7.1 में, $PQ = PR$ और $\angle Q = \angle R$ है। सिद्ध कीजिए कि $\Delta PQS \cong \Delta PRT$ है।

आकृति 7.1

हल : ΔPQS और ΔPRT में,

$PQ = PR$ (दिया है)

$\angle Q = \angle R$ (दिया है)

तथा $\angle QPS = \angle RPT$ (एक ही कोण)

अतः, $\Delta PQS \cong \Delta PRT$ (ASA)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 7.2 में, दो रेखाएँ AB और CD परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद इस प्रकार करती हैं कि $BC \parallel DA$ और $BC = DA$ है। दर्शाइए कि बिंदु O दोनों ही रेखाखंडों AB और CD का मध्य-बिंदु है।

आकृति 7.2

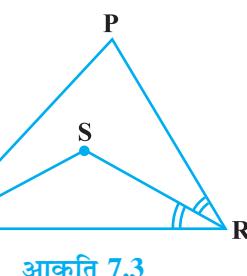
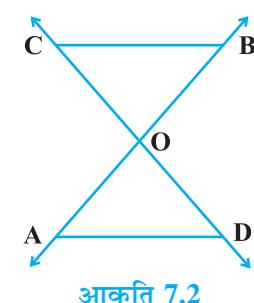
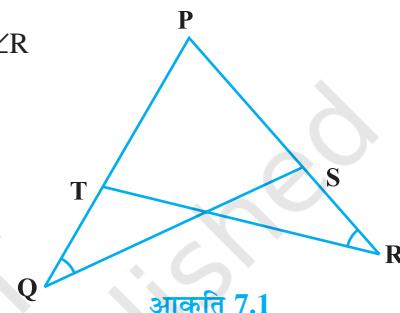
हल : $BC \parallel AD$ (दिया है)

अतः, $\angle CBO = \angle DAO$ (एकांतर अंत:कोण)

और $\angle BCO = \angle ADO$ (एकांतर अंत:कोण)

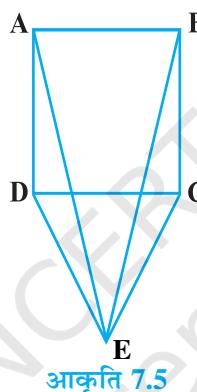
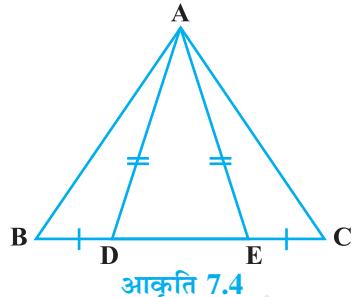
साथ ही, $BC = DA$ (दिया है)

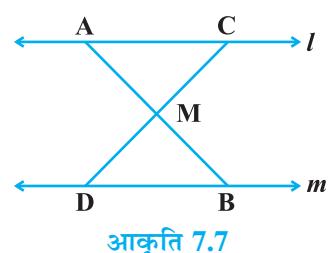
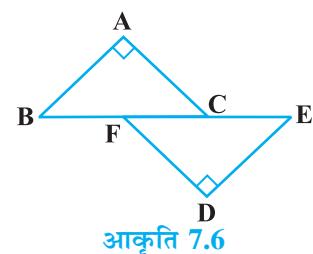
इसलिए, $\Delta BOC \cong \Delta AOD$ (ASA)

अतः, $OB = OA$ और $OC = OD$ है, अर्थात् O दोनों रेखाखंडों AB और CD का मध्य-बिंदु है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : आकृति 7.3 में, $PQ > PR$ है तथा QS तथा RS क्रमशः $\angle Q$ और $\angle R$ के समद्विभाजक हैं। दर्शाइए कि $SQ > SR$ है।

आकृति 7.3

हल : $PQ > PR$ (दिया है)

इसलिए, $\angle R > \angle Q$ (लंबी भुजा के सामने का कोण बड़ा होता है।)

अतः, $\angle SRQ > \angle SQR$ (प्रत्येक कोण का आधा)

अतः, $SQ > SR$ (बड़े कोण की सम्मुख भुजा लंबी होगी।)

प्रश्नावली 7.3

1. ABC समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है तथा BD और CE इसकी दो माध्यिकाएँ हैं। दर्शाइए कि BD = CE है।
2. आकृति 7.4 में, D और E त्रिभुज ABC की भुजा BC पर दो बिंदु इस प्रकार स्थित हैं कि BD = CE और AD = AE है। दर्शाइए कि Δ ABD $\cong$ Δ ACE है।

आकृति 7.4

3. CDE एक वर्ग ABCD की भुजा CD पर बना एक समबाहु त्रिभुज है (आकृति 7.5)। दर्शाइए कि ΔADE $\cong$ Δ BCE है।

आकृति 7.5

4. आकृति 7.6 में, BA $\perp$ AC और DE $\perp$ DF इस प्रकार हैं कि BA = DE और BF = EC है। दर्शाइए कि Δ ABC $\cong$ Δ DEF है।

आकृति 7.6

5. एक Δ PSR की भुजा SR पर एक बिंदु Q इस प्रकार स्थित है कि PQ = PR है। सिद्ध कीजिए कि PS > PQ है।
6. Δ PQR की भुजा QR पर S कोई बिंदु स्थित है। दर्शाइए कि PQ + QR + RP > 2 PS है।
7. AB = AC वाले एक Δ ABC की भुजा, AC पर D कोई बिंदु स्थित है। दर्शाइए कि CD < BD है।
8. आकृति 7.7 में, $l \parallel m$ है तथा M रेखाखंड AB का मध्य-बिंदु है। दर्शाइए कि M किसी भी रेखाखंड CD का मध्य-बिंदु है जिसके अंत:बिंदु क्रमश: l और m पर स्थित हैं।

आकृति 7.7

9. AB = AC वाले एक समद्विबाहु त्रिभुज के कोणों B और C के समद्विभाजक परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। BO को एक बिंदु M तक बढ़ाया जाता है। सिद्ध कीजिए कि $\angle$MOC = $\angle$ABC है।

10. AB = AC वाले एक समद्विबाहु त्रिभुज के कोणों B और C के समद्विभाजक परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि $\angle$ABC के आसन्न एक बहिष्कोण $\angle$BOC के बराबर है।

11. आकृति 7.8 में, AD कोण BAC का समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि AB > BD है।

आकृति 7.8

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: आकृति 7.9 में, ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसका कोण B समकोण इस प्रकार है कि $\angle BCA = 2\angle BAC$ है। दर्शाइए कि कर्ण AC = 2 BC है।

आकृति 7.9

हल : CB को बिंदु D तक इस प्रकार बढ़ाइए कि BC = BD हो तथा AD को मिलाइए।

Δ ABC और Δ ABD में,

BC = BD (रचना से)

AB = AB (एक ही भुजा)

$\angle ABC = \angle ABD$ (प्रत्येक 90° है)

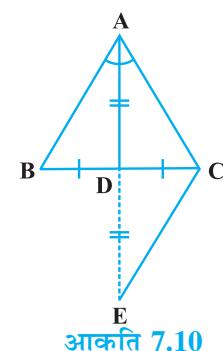
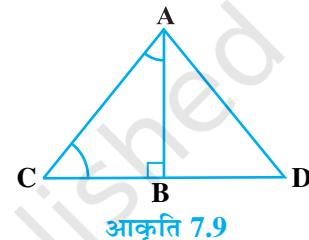
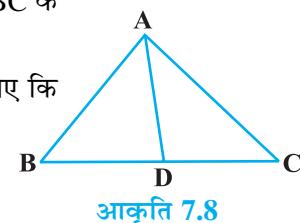
इसलिए, $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ (SAS)

अतः, $\angle CAB = \angle DAB$ (CPCT) (1)

और AC = AD (CPCT) (2)

इस प्रकार, $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = x + x = 2x$ [(1) से] (3)

तथा $\angle ACD = \angle ADB = 2x$ [(2) से, AC = AD] (4)

अर्थात् Δ ACD एक समबाहु त्रिभुज है। [(3) और (4) से]

या AC = CD, अर्थात्, AC = 2 BC (क्योंकि BC = BD)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : सिद्ध कीजिए कि यदि दो त्रिभुजों में, एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और उनकी अंतर्गत भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

हल : कक्षा IX की गणित पाठ्यपुस्तक की प्रमेय 7.1 की उपपत्ति देखिए।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : यदि एक त्रिभुज के किसी कोण का समद्विभाजक उसकी सम्मुख भुजा को भी समद्विभाजित करे, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु होगा।

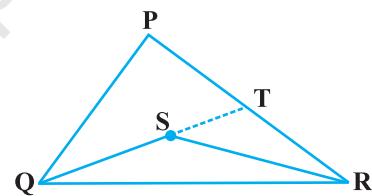
आकृति 7.10

हल : हमें एक Δ ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार प्राप्त है कि $\angle BAD = \angle CAD$ और BD = CD है (देखिए आकृति 7.10)। हमें

सिद्ध करना है कि $AB = AC$ है।

AD को एक बिंदु E तक इस प्रकार बढ़ाइए कि $AD = DE$ हो। अब CE को मिलाइए।

अब, Δ ABD और Δ ECD में, हमें प्राप्त है

	$BD = CD$	(दिया है)	
	$AD = ED$	(रचना से)	
तथा	$\angle ADB = \angle EDC$	(शीर्षाभिमुख कोण)	
अतः,	$\Delta ABD \cong \Delta ECD$	(SAS)	
इसलिए,	$AB = EC$	(CPCT)	(1)
और	$\angle BAD = \angle CED$	(CPCT)	(2)
साथ ही,	$\angle BAD = \angle CAD$	(दिया है)	
अतः,	$\angle CAD = \angle CED$	[(2) से]	
इसलिए,	$AC = EC$	[बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ]	(3)
अतः,	$AB = AC$	[(1) और (3) से]	

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : S किसी त्रिभुज Δ PQR के अभ्यंतर में स्थित कोई बिंदु है। दर्शाइए कि $SQ + SR < PQ + PR$ है।

हल : QS को PR से T पर प्रतिच्छेद करने के लिए बढ़ाइए (देखिए आकृति 7.11)।

आकृति 7.11

Δ PQT से, हमें प्राप्त होता है:

$PQ + PT > QT$ (किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है)

अर्थात्, $PQ + PT > SQ + ST$ (1)

Δ TSR से, हमें प्राप्त होता है:

$ST + TR > SR$ (2)

(1) और (2) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है:

$PQ + PT + ST + TR > SQ + ST + SR$

अर्थात्, $PQ + PT + TR > SQ + SR$

अर्थात्, $PQ + PR > SQ + SR$

या $SQ + SR < PQ + PR$

प्रश्नावली 7.4

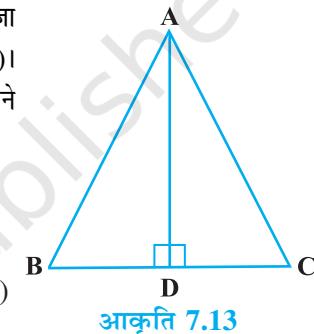
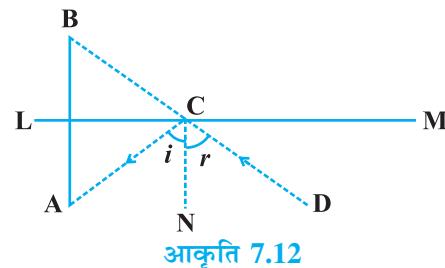
1. एक समबाहु त्रिभुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

2. एक समतल दर्पण LM के सम्मुख स्थित बिंदु A पर रखी किसी वस्तु का प्रतिबिम्ब एक प्रेक्षक D से बिंदु B पर देखता है, जैसा कि आकृति 7.12 में दर्शाया गया है। सिद्ध कीजिए कि यह प्रतिबिम्ब दर्पण के पीछे उतनी ही दूरी पर है जितनी दूरी पर वह वस्तु दर्पण के सम्मुख है।

आकृति 7.12

[**संकेत :** CN दर्पण पर अभिलंब है। साथ ही, आपतन कोण = परावर्तन कोण।]

3. AB = AC वाला ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है तथा D भुजा BC पर इस प्रकार स्थित है कि AD ⊥ BC है (आकृति 7.13)। ∠BAD = ∠CAD सिद्ध करने के लिए, किसी विद्यार्थी ने निम्नलिखित प्रक्रिया अपनाई:

आकृति 7.13

Δ ABD और Δ ACD में,

	AB = AC	(दिया है)
	∠B = ∠C	(क्योंकि AB = AC)
तथा	∠ADB = ∠ADC	(प्रत्येक 90°)
अत:,	Δ ABD ≅ Δ ACD	(AAS)
इसलिए,	∠BAD = ∠CAD	(CPCT)

उपरोक्त तर्कणों में क्या कमी है?

[**संकेत :** याद कीजिए कि जब AB = AC हो, तो ∠B = ∠C को कैसे सिद्ध किया जाता है।]

4. P कोण ABC के समद्विभाजक पर स्थित कोई बिंदु है। यदि P से होकर BA के समांतर खींची गई रेखा BC से Q पर मिलती है, तो सिद्ध कीजिए कि BPQ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

5. ABCD एक चतुर्भुज है, जिसमें AB = BC और AD = CD है। दर्शाइए कि BD दोनों कोणों ABC और ADC को समद्विभाजित करता है।

6. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है। ∠A का समद्विभाजक BC से D पर मिलता है। सिद्ध कीजिए कि BC = 2 AD है।

7. O एक वर्ग ABCD के अभ्यंतर में स्थित बिंदु इस प्रकार है कि OAB एक समबाहु त्रिभुज है। सिद्ध कीजिए कि Δ OCD एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

8. ABC और DBC एक ही आधार BC पर स्थित दो त्रिभुज इस प्रकार हैं कि बिंदु A और D आधार BC के विपरीत ओर स्थित हैं, AB = AC और DB = DC है। दर्शाइए कि AD रेखाखंड BC का लंब समद्विभाजक है।

9. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें AC = BC है। AD और BE क्रमशः BC और AC पर शीर्षलंब हैं। सिद्ध कीजिए कि AE = BD है।

10. सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा की संगत माध्यिका के दोगुने से बड़ा होता है।

11. दर्शाइए कि एक चतुर्भुज ABCD में, AB + BC + CD + DA < 2 (BD + AC) होता है।

12. दर्शाइए कि एक चतुर्भुज ABCD में, AB + BC + CD + DA > AC + BD होता है।

13. एक त्रिभुज ABC में, D भुजा AC का मध्य-बिंदु है ताकि $BD = \frac{1}{2} AC$ है। दर्शाइए कि ∠ABC एक समकोण है।

14. एक समकोण त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि कर्ण के मध्य-बिंदु को उसके सम्मुख शीर्ष से मिलाने वाला रेखाखंड कर्ण का आधा होता है।

15. दो रेखाएँ l और m बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं तथा P बिंदु O से होकर जाने वाली रेखा n पर स्थित कोई बिंदु इस प्रकार है कि P रेखाओं l और m से समदूरस्थ है। सिद्ध कीजिए कि n रेखाओं l और m के बीच बनने वाले कोण का समद्विभाजक है।

16. एक समलंब ABCD की क्रमशः समांतर भुजाओं AB और DC के मध्य-बिंदुओं M और N को मिलाने वाला रेखाखंड दोनों भुजाओं AB और DC पर लंब है। सिद्ध कीजिए कि AD = BC है।

17. ABCD एक चतुर्भुज इस प्रकार है कि विकर्ण AC दोनों कोणों A और C का समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि AB = AD और CB = CD है।

18. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है तथा ∠C का समद्विभाजक भुजा AB को D पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि AC + AD = BC है।

19. AB और CD क्रमशः एक चतुर्भुज ABCD की सबसे छोटी और सबसे बड़ी भुजाएँ हैं। ∠B और ∠D में से निश्चित कीजिए कि कौन बड़ा है।

20. सिद्ध कीजिए कि एक समबाहु त्रिभुज को छोड़कर, किसी त्रिभुज में सबसे लंबी भुजा का सम्मुख कोण एक समकोण के $\frac{2}{3}$ भाग से बड़ा होता है।

21. ABCD एक चतुर्भुज है, जिसमें AB = AD और CB = CD है। सिद्ध कीजिए कि AC, BD का लंब समद्विभाजक है।